Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ

А.С. СМОГОРЖЕВСКИЙ

МЕТОД КООРДИНАТ

*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1952

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 10

А. С. СМОГОРЖЕВСКИЙ

МЕТОД КООРДИНАТ

8884

БИБЛИОТЕКА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1952

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3

§ 1. Координаты точки на прямой 5
§ 2. Координаты точки в плоскости 6
§ 3. Основные задачи 9
§ 4. Уравнения геометрических фигур 11
§ 5. Уравнение прямой 15
§ 6. Метод координат как средство решения геометрических задач 17
§ 7. Некоторые приложения метода координат 20
§ 8. Полярные координаты 26
§ 9. Примеры определения фигур уравнениями 30

Заключение 38

Редактор *А. З. Рывкин.*
Техн. редактор *С. С. Гаврилов.* Корректор *А. Н. Нарежная.*

Подписано к печати 4/XI 1952 г. Бумага 84×108¹/₃₂ 0,625 бум. л. 2,05 печ. л. 1,82 уч.-изд. л. 35 600 тип. зн. в печ. л. Тираж 25 000 экз. Т-08931. Зак. № 3783, Цена книги 55 коп. Номинал по прейскуранту 1952 г.

4-я типография им. Евг. Соколовой Главполиграфиздата при Совете Министров СССР. Ленинград, Измайловский пр., 29.

ВВЕДЕНИЕ

Большую роль в развитии геометрии сыграло применение алгебры к изучению свойств геометрических фигур, разросшееся в самостоятельную науку — аналитическую геометрию. Возникновение аналитической геометрии связано с открытием метода координат, являющегося основным её методом.

Координатами точки называются числа, определяющие положение точки на данной линии или на данной поверхности или же в пространстве. Так, положение точки на земной поверхности будет определено, если известны её географические координаты — широта и долгота.

Для нахождения координат точки необходимо задание ориентиров, от которых ведётся отсчёт. В случае географических координат такими ориентирами будут экватор и нулевой меридиан.

Если даны ориентиры и указано, как, пользуясь ими, находить координаты точки, то говорят, что задана система координат.

Характерной особенностью метода координат является определение геометрических фигур уравнениями (см. § 4), что позволяет производить геометрические исследования и решать геометрические задачи средствами алгебры.

Придавая геометрическим исследованиям алгебраический характер, метод координат переносит в геометрию наиболее важную особенность алгебры — единообразие способов решения задач. Если в арифметике и элементарной геометрии приходится, как правило, искать для каждой задачи особый путь решения, то в алгебре и аналитической геометрии решения проводятся по общему для всех задач плану, легко приспособляемому к любой задаче. Можно сказать, что ана-

литическая геометрия занимает такое же положение по отношению к элементарной геометрии, какое алгебра занимает относительно арифметики. Перенесение в геометрию свойственных алгебре и поэтому обладающих большой общностью способов решения задач составляет главную ценность метода координат. Следует, однако, предостеречь читателя от пренебрежительного отношения к приёмам элементарной геометрии, так как в отдельных случаях они позволяют находить изящные решения, более простые, чем получаемые методом координат.

Другое достоинство метода координат состоит в том, что его применение избавляет от необходимости прибегать к наглядному представлению сложных пространственных конфигураций.

При практическом применении понятия координат координаты предмета, рассматриваемого условно как точка, могут быть определены лишь приближённо. Задание координат предмета означает, что точка, определяемая этими координатами, либо является одной из точек этого предмета либо достаточно близка к нему.

Размеры и назначение книжки обязывают нас ограничиться сообщением начальных сведений о методе координат и простейших его приложениях. Много внимания уделено нами вопросу определения геометрических фигур уравнениями, обычно затрудняющему учащегося при первом ознакомлении с методом координат. Разъяснение этого вопроса иллюстрировано детально рассмотренными примерами.

Автор

§ 1. КООРДИНАТЫ ТОЧКИ НА ПРЯМОЙ

Наиболее элементарный случай введения координат связан с определением положения точки на прямой линии. С рассмотрения этого случая мы начнём изложение метода координат.

Отметим на прямой две произвольные, но различные точки O и E (рис. 1) и примем отрезок OE за единицу длины [1]).

Будем считать, что каждой точке прямой OE соответствует число, называемое *координатой* данной точки и определяемое следующим образом: координата точки P прямой OE есть положительное число, равное длине отрезка OP, если точка P лежит по ту же сторону точки O, что и точка E; координата точки P прямой OE есть отрицательное число, равное по абсолютному значению длине отрезка OP, если точки P и E лежат по разные стороны точки O; координата точки O равна нулю.

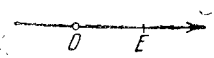

Рис. 1.

Если эти условия выполнены, то прямая OE называется *числовой осью* или *осью координат*; точка O называется *началом координат*. Часть числовой оси, содержащая точки с положительными координатами, называется положительной её частью; часть числовой оси, содержащая точки с отрицательными координатами, называется отрицательной её частью.

Каждая точка данной числовой оси имеет определённую координату, причём координаты двух различных точек одной

[1]) Точки O и E можно выбрать так, чтобы отрезок OE был равен заранее данной единице длины, например 1 *см*.

и той же числовой оси различны. С другой стороны, каждое действительное число есть координата определённой точки данной числовой оси. Например, координата точки E равна $+1$, а число -1 есть координата точки, симметричной с E относительно O. Запись $E(1)$, $A\left(-2\frac{1}{3}\right)$, $B(x)$, $C(x_1)$, $D(x_2)$ и т. п. показывает, что числа 1, $-2\frac{1}{3}$, x, x_1, x_2 являются соответственно координатами точек E, A, B, C, D.

Направление, соответствующее перемещению по числовой оси от точки O к точке E, называется направлением числовой оси; оно указывается обычно стрелкой (рис. 1).

§ 2. КООРДИНАТЫ ТОЧКИ В ПЛОСКОСТИ

Построим в плоскости две взаимно перпендикулярные числовые оси Ox и Oy так, чтобы точка их пересечения O была для каждой из них началом координат (рис. 2). Назовём

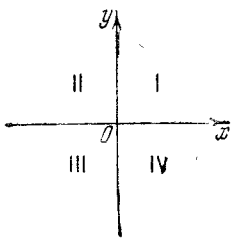

Рис. 2.

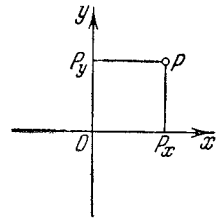

Рис. 3.

оси Ox и Oy соответственно *осью абсцисс* и *осью ординат*, а плоскость, в которой они расположены, — плоскостью Oxy [1]). Будем считать, что для обеих координатных осей принята одна и та же единица длины.

Оси Ox и Oy разделяют плоскость Oxy на четыре четверти; порядок нумерации четвертей в зависимости от направлений координатных осей указан на рис. 2.

Рассмотрим в плоскости Oxy произвольную точку P и основания P_x и P_y перпендикуляров, опущенных из неё соот-

[1]) Оси Ox и Oy называются также *осями координат* или координатными осями.

ветственно на оси Ox и Oy, то есть прямоугольные проекции её на эти оси (рис. 3). Обозначим через x координату на оси Ox точки P_x и через y — координату на оси Oy точки P_y. Числа x и y называются координатами точки P, что обозначается следующей записью: $P(x; y)$. Координаты такого рода имеют название *прямоугольных декартовых координат* [1]).

Таким образом, отыскание координат точки P в плоскости приводится к отысканию координат двух точек (P_x и P_y) на числовых осях.

Координата x точки P_x называется *абсциссой* точки P, координата y точки P_y называется *ординатой* точки P. Если точка P лежит на оси Ox, то её ордината равна нулю; если точка P лежит на оси Oy, то её абсцисса равна нулю. Обе координаты точки O равны нулю.

На рис. 4 указаны знаки координат точки в зависимости от того, в какой четверти она расположена; слева поставлен знак абсциссы, справа — знак ординаты.

Покажем, как строится точка P, если известны её координаты x и y. Строим на оси Ox точку P_x по её абсциссе x

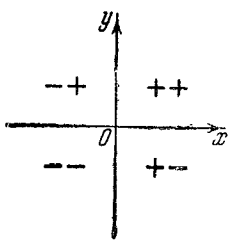

Рис. 4.

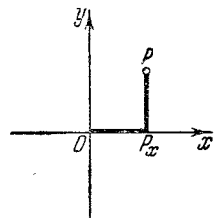

Рис. 5.

и на оси Oy точку P_y по её ординате y (см. рис. 3); проводим через P_x перпендикуляр к оси Ox, через P_y — перпендикуляр к оси Oy; эти перпендикуляры пересекутся в искомой точке P.

Рассмотренное построение можно видоизменить (рис. 5): находим точку P_x, проводим через неё перпендикуляр к оси Ox

---

[1]) По имени известного философа и математика XVII века Рене Декарта.

и откладываем на нём отрезок P_xP, равный по длине абсолютному значению координаты y, причём он откладывается от точки P_x вверх, если $y > 0$, и вниз, если $y < 0$ [1]); если $y = 0$, то точка P совпадает с точкой P_x.

Основываясь на последнем построении, можно сказать, что координаты точки указывают один из путей, ведущих из начала координат в данную точку: зная абсциссу x точки P, мы находим часть OP_x этого пути, зная ординату y точки P, мы находим вторую его часть P_xP.

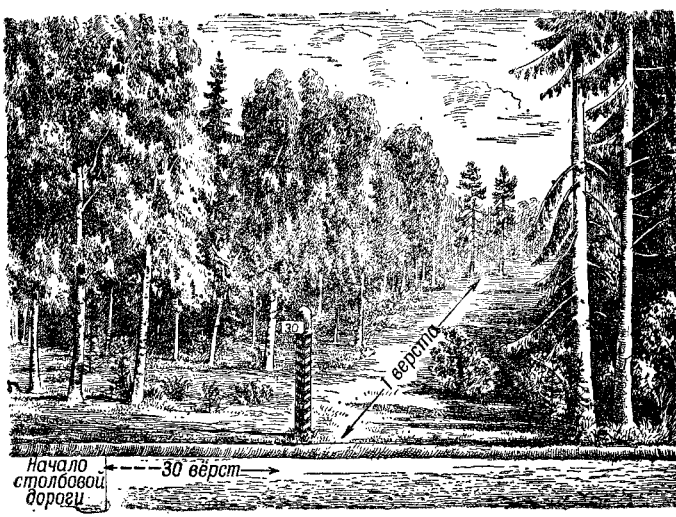

Рис. 6.

Заметим, к слову, что понятие координат не является выдумкой математиков: оно заимствовано из практики, и в примитивной форме способом координат пользуются даже незнакомые с математикой люди. Напомним, например, отры-

[1]) Точнее, точка P и положительная часть оси Oy должны лежать по одну сторону оси Ox, если $y > 0$, и по разные её стороны, если $y < 0$. В дальнейшем мы не будем делать подобной оговорки, считая, что положительная часть оси Ox лежит справа от отрицательной её части, а положительная часть оси Oy лежит над отрицательной её частью.

и откладываем на нём отрезок P_xP, равный по длине абсолютному значению координаты y, причём он откладывается от точки P_x вверх, если $y > 0$, и вниз, если $y < 0$ [1]); если $y = 0$, то точка P совпадает с точкой P_x.

Основываясь на последнем построении, можно сказать, что координаты точки указывают один из путей, ведущих из начала координат в данную точку: зная абсциссу x точки P, мы находим часть OP_x этого пути, зная ординату y точки P, мы находим вторую его часть P_xP.

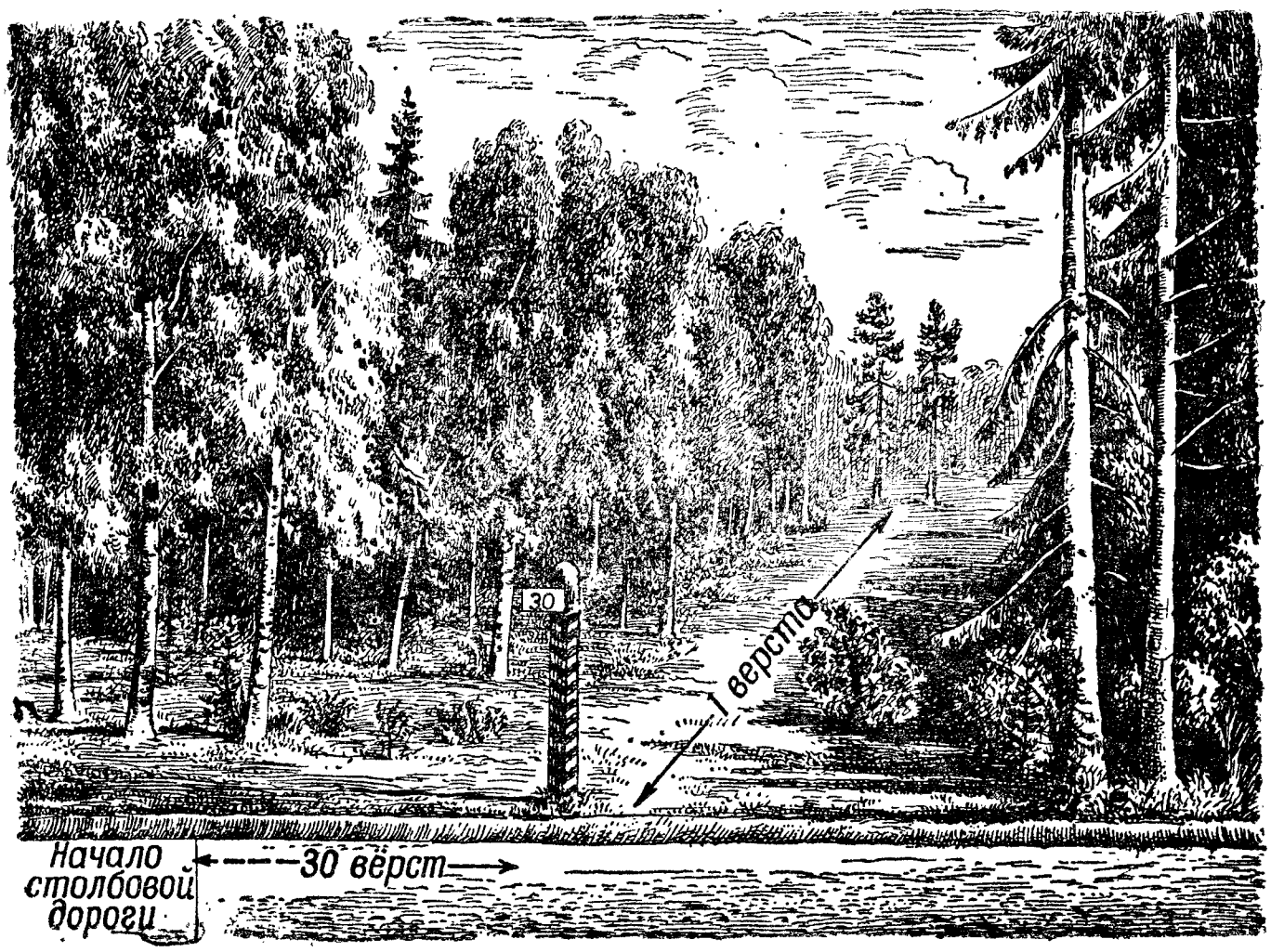

Рис. 6.

Заметим, к слову, что понятие координат не является выдумкой математиков: оно заимствовано из практики, и в примитивной форме способом координат пользуются даже незнакомые с математикой люди. Напомним, например, отры-

---

[1]) Точнее, точка P и положительная часть оси Oy должны лежать по одну сторону оси Ox, если $y > 0$, и по разные её стороны, если $y < 0$. В дальнейшем мы не будем делать подобной оговорки, считая, что положительная часть оси Ox лежит справа от отрицательной её части, а положительная часть оси Oy лежит над отрицательной её частью.

вок из поэмы Некрасова: «Кому на Руси жить хорошо»:

Идите по лесу,
Против столба тридцатого
Прямёхонько версту:
Придёте на поляночку,
Стоят на той поляночке
Две старые сосны,
Под этими под соснами
Закопана коробочка.
Добудьте вы её...

Здесь 30 и 1 — координаты поляночки (в том смысле, в каком понимается задание координат предмета, — см. Введение); за единицу длины принята верста (рис. 6).

§ 3. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ

Обычно решение сложного вопроса приводится к решению ряда простых задач; некоторые из них, встречающиеся наиболее часто и отличающиеся наибольшей простотой, принято называть основными. В этом параграфе будут рассмотрены две основные задачи геометрии: вычисление расстояния между двумя данными точками и вычисление площади треугольника, вершины которого даны. Поскольку в аналитической геометрии точка задаётся координатами, то решения указанных задач будут состоять в выводе формул, определяющих искомые величины через координаты данных точек.

Задача 1. Найти расстояние между двумя данными точками.

Пусть в плоскости Oxy даны точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Опустим из этих точек перпендикуляры AA_x и BB_x на ось Ox, AA_y и BB_y на ось Oy (рис. 7). Обозначим длину отрезка AB через d.

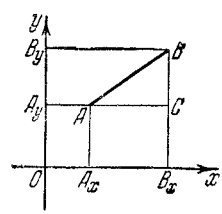

Рис. 7.

Пусть прямые AA_y и BB_x пересекутся в точке C. Так как треугольник ABC — прямоугольный, то

$$d = AB = \sqrt{AC^2 + CB^2}. \qquad (1)$$

Принимая во внимание, что

$$OA_x = x_1,\ OB_x = x_2,\ OA_y = y_1,\ OB_y = y_2,$$
$$AC = A_xB_x = OB_x - OA_x = x_2 - x_1,$$
$$CB = A_yB_y = OB_y - OA_y = y_2 - y_1,$$

получим из (1):

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (2)$$

Можно доказать, что эта формула справедлива при любом расположении точек A и B.

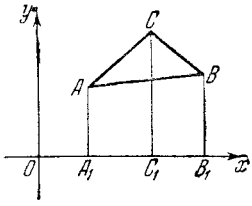

Рис. 8.

Задача 2. Вычислить площадь треугольника по координатам его вершин.

Пусть вершинами треугольника будут точки: $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;\ y_3)$. Опустим из этих точек на ось Ox перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1 (рис. 8). Очевидно, площадь S треугольника ABC можно выразить через площади трапеций AA_1B_1B, AA_1C_1C, CC_1B_1B:

$$S = \text{пл. } AA_1C_1C + \text{пл. } CC_1B_1B - \text{пл. } AA_1B_1B.$$

Так как

$$AA_1 = y_1,\ BB_1 = y_2,\ CC_1 = y_3,$$

$$A_1B_1 = x_2 - x_1,\ A_1C_1 = x_3 - x_1,\ C_1B_1 = x_2 - x_3,$$

то

$$\text{пл. } AA_1C_1C = \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1),$$

$$\text{пл. } CC_1B_1B = \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_2 - x_3),$$

$$\text{пл. } AA_1B_1B = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1).$$

Следовательно,

$$S = \frac{1}{2}[(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + (y_2 + y_3)(x_2 - x_3) - (y_1 + y_2)(x_2 - x_1)].$$

Отсюда после упрощений получим

$$S = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]. \qquad (3)$$

Заметим, что формула (3) справедлива, с точностью до знака [1]), при любом расположении вершин треугольника, хотя из нашего вывода этого не видно.

§ 4. УРАВНЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

Выделим в плоскости некоторое конечное или бесконечное множество точек. Выделенные точки образуют плоскую геометрическую фигуру. Эта фигура будет определена, если мы сумеем указать, какие именно точки плоскости нами выделены.

Можно, например, закрасить выделенные точки карандашом или чернилами, что мы и делаем, описывая, например, окружность с помощью циркуля или проводя прямую с помощью линейки [2]). Можно рассказать, какие точки выделяются, пользуясь понятием геометрического места точек, что мы и делаем, определяя окружность как геометрическое место точек плоскости, находящихся на данном расстоянии от данной точки. Можно, наконец, применить для этой цели своеобразный приём, употребляемый в аналитической геометрии и состоящий в следующем.

В плоскости строятся оси Ox, Oy прямоугольной декартовой системы координат. Затем даётся уравнение, содержащее величины x и y или одну из этих величин [3]), и выделяются те и только те точки плоскости, координаты x, y которых удовлетворяют данному уравнению. Выделенные так точки образуют некоторую фигуру; данное уравнение называется уравнением этой фигуры.

Таким образом, в аналитической геометрии уравнение играет как бы роль сита, просеивающего ненужные нам точки и задерживающего точки, входящие в состав интересующей нас фигуры.

---

[1]) То есть величина S, вычисленная по формуле (3), может оказаться отрицательной, но её абсолютное значение равно величине площади треугольника.

[2]) Строго говоря, закрашиваются не точки, а часть бумаги, которая может рассматриваться как носитель интересующих нас точек.

[3]) В терминологии, принятой в алгебре, такое уравнение называется уравнением с двумя неизвестными (или с одной неизвестной, если в уравнение входит только одна из величин x или y).

Заметим, что в уравнении фигуры величины x и y называются *переменными*, так как они, вообще говоря, изменяются при переходе от одной точки фигуры к другой её точке (если, понятно, фигура содержит не менее двух точек). Кроме переменных x и y в уравнение фигуры могут входить и постоянные величины, причём некоторые из них или все они могут быть обозначены буквами.

Напишем уравнение с переменными x, y в общем виде:

$$f(x, y) = 0. \tag{4}$$

Здесь через $f(x, y)$ [1]) обозначено математическое выражение, содержащее величины x и y или по крайней мере одну из этих величин.

В соответствии со сказанным выше мы будем считать, что *уравнение* (4) *определяет некоторую фигуру как множество точек, прямоугольные декартовы координаты которых удовлетворяют этому уравнению.*

Из этого основного положения аналитической геометрии нетрудно сделать следующий вывод. Данная точка P принадлежит фигуре F, определяемой уравнением (4), если её координаты удовлетворяют уравнению (4); в противном случае точка P не принадлежит фигуре F.

Рассмотрим несколько простых примеров.

Пример 1. Уравнение

$$y - x = 0$$

или, что то же,

$$y = x \tag{5}$$

определяет прямую, содержащую биссектрису угла, образованного положительными частями координатных осей (рис. 9).

Действительно, точка $P(x; y)$ этой прямой равноудалена от координатных осей; её расстояния от осей Ox и Oy равны соответственно y и x, если она лежит в I четверти, и равны соответственно $-y$ и $-x$, если она лежит в III четверти. И в том и в другом случае координаты точки P удовлетво-

---

[1]) Читается: «функция f от x, y». Вместо f можно писать и другие буквы, например, F, φ: $F(x, y)$, $\varphi(x, y)$ и т. п. Приведём несколько примеров обозначаемых так выражений: $y - x$, $x^2 + y^2 - 4$, $x \sin y$, $\dfrac{x+y}{x-y}$ и т. п.

ряют уравнению (5). С другой стороны, координаты точки, не лежащей на указанной выше прямой, не могут быть равными друг другу.

Подобным же образом убеждаемся, что уравнение

$$y = -x$$

определяет прямую, содержащую биссектрису угла, смежного

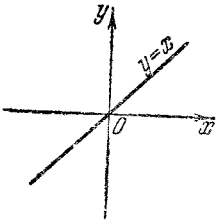

Рис. 9.

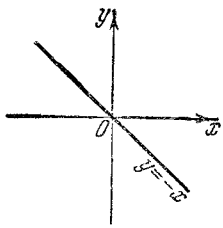

Рис. 10.

с углом, образованным положительными частями координатных осей (рис. 10).

Пример 2. Уравнение

$$y = b \tag{6}$$

определяет прямую, параллельную оси Ox. Эта прямая лежит над осью Ox, если $b > 0$, под осью Ox, если $b < 0$, и совпадает с осью Ox, если $b = 0$.

Заметим, что уравнение (6) не содержит переменной x; это показывает, что никаких ограничений на величину x оно не налагает: значение величины x может быть произвольным.

Рассмотрим подробнее случай, когда $b = 0$, то есть рассмотрим уравнение

$$y = 0. \tag{7}$$

Это уравнение показывает, что из всех точек плоскости нужно выделить те и только те точки, расстояния которых от оси Ox равны нулю, то есть точки, лежащие на оси Ox. Следовательно, уравнение (7) определяет ось Ox.

Пример 3. Уравнение

$$x = a$$

определяет прямую, параллельную оси Oy. Эта прямая совпадает с осью Oy, если $a = 0$.

Пример 4. Пусть точка $M(a;\ b)$ есть центр окружности радиуса r (рис. 11). Возьмём на этой окружности произвольную точку $P(x;\ y)$. Так как длина отрезка MP равна r, то по формуле (2) получим

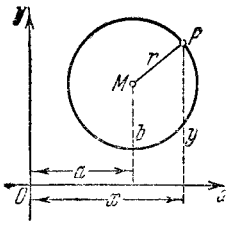

Рис. 11.

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2};$$

отсюда

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \qquad (8)$$

Следовательно, уравнение (8) есть уравнение окружности радиуса r, имеющей центр в точке с координатами a, b. Если, в частности, центр окружности совпадает с началом координат, то $a = b = 0$, и уравнение (8) принимает вид

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Рассмотрим, например, уравнение

$$x^2 + y^2 = 25, \qquad (9)$$

которое можно привести к виду

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}. \qquad (10)$$

Найдём несколько точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, и построим их. Составим прежде

x	y
0	± 5
± 1	$\pm\sqrt{24} \approx \pm 4{,}9$
± 2	$\pm\sqrt{21} \approx \pm 4{,}6$
± 3	± 4
± 4	± 3
± 5	0

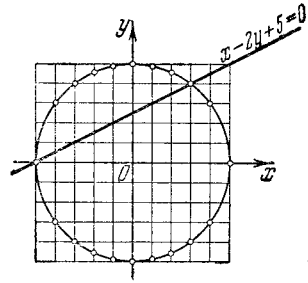

Рис. 12.

всего таблицу; в первом столбце её будем писать произвольно взятые нами значения величины x, во втором — соответственные значения величины y, вычисленные по формуле (10).

Таблица даёт координаты точек, принадлежащих окружности, определяемой уравнением (9); эти точки построены на рис. 12. Мы могли бы получить больше точек данной окружности, если бы придавали переменной x не только целые, но и дробные значения, например $\pm 0{,}1$, $\pm 0{,}2$ и т. д.

Заметим, что обе координаты любой точки плоскости — действительные числа. Поэтому в данном примере нет смысла находить y, если $x < -5$ или $x > +5$, так как в этих случаях y будет иметь мнимые значения.

§ 5. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

Рассмотрим уравнение первой степени с переменными x и y или с одной из этих переменных. Очевидно, такое уравнение после упрощений может быть приведено к виду

$$Ax + By + C = 0, \tag{11}$$

где A, B, C — постоянные величины, причём по крайней мере одна из величин A, B не равна нулю. Допустим для определённости, что $A \neq 0$.

Покажем, что уравнение (11) определяет прямую линию. В основу доказательства мы положим тот очевидный факт, что площадь треугольника равна нулю тогда и только тогда, когда все его вершины лежат на одной прямой.

Придадим переменной y два различных значения y_1 и y_2 и найдём из уравнения (11) соответствующие значения x_1 и x_2 переменной x, что может быть сделано, так как коэффициент при x в уравнении (11) отличен от нуля. Точки $L(x_1; y_1)$ и $M(x_2; y_2)$ принадлежат фигуре (11)[1]. Это — различные точки, так как $y_1 \neq y_2$. Рассмотрим ещё произвольную точку $N(x_3; y_3)$.

Подставляя последовательно координаты точек L, M, N в выражение $Ax + By + C$ и вычисляя его значения, получим три тождества:

$$Ax_1 + By_1 + C = 0,$$
$$Ax_2 + By_2 + C = 0,$$
$$Ax_3 + By_3 + C = a.$$

---

[1]) Вместо «фигура, определяемая уравнением $f(x, y) = 0$», нередко для сокращения речи говорят: «фигура $f(x, y) = 0$», или же называют номер уравнения, определяющего данную фигуру.

Правые части первых двух тождеств — нули, так как координаты точек L и M удовлетворяют уравнению (11). Правую часть третьего тождества мы обозначили через a; число a равно нулю, если точка N принадлежит фигуре (11), и не равно нулю в противном случае.

Помножим обе части первого тождества на $y_2 - y_3$, второго — на $y_3 - y_1$, третьего — на $y_1 - y_2$ и сложим полученные равенства. В результате получим следующее соотношение, в котором коэффициент при A, в силу формулы (3), равен $2S$, где S — площадь треугольника LMN:

$$2A \cdot S + B(y_1y_2 - y_1y_3 + y_2y_3 - y_1y_2 + y_1y_3 - y_2y_3) + \\ + C(y_2 - y_3 + y_3 - y_1 + y_1 - y_2) = a(y_1 - y_2).$$

Отсюда после очевидных упрощений будем иметь:

$$2A \cdot S = a(y_1 - y_2), \tag{12}$$

причём, как было отмечено выше, $A \neq 0$, $y_1 - y_2 \neq 0$.

Если точка N принадлежит фигуре (11), то $a = 0$; в этом случае из равенства (12) вытекает, что и $S = 0$; следовательно, точка N лежит на прямой LM. Допустим теперь, что N — произвольная точка прямой LM; тогда $S = 0$; в этом случае из равенства (12) вытекает, что и $a = 0$, следовательно, точка N принадлежит фигуре (11).

Итак, каждая точка фигуры (11) лежит на прямой LM, и каждая точка прямой LM принадлежит фигуре (11). Поэтому уравнение (11) определяет прямую, что и требовалось доказать.

Покажем теперь, что, обратно, уравнение любой прямой может быть написано в виде (11). Пусть на данной прямой лежат точки $P(x_1; y_1)$ и $Q(x_2; y_2)$. Уравнение

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1) = 0 \tag{13}$$

— первой степени, поэтому оно определяет прямую. Это — прямая PQ, так как координаты точек P и Q удовлетворяют уравнению (13).

Из предыдущего вытекает, что построение фигуры, определяемой уравнением первой степени, не представляет труда. Так как эта фигура, по доказанному выше, есть прямая линия, то достаточно найти две её точки, построить их и провести через них прямую.

Рассмотрим, например, уравнение

$$x+y=5. \qquad (14)$$

Нетрудно убедиться, что точки $P(5;\ 0)$ и $Q(0;\ 5)$ принадлежат прямой (14). Она построена на рис. 13.

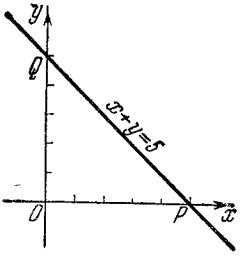

Рис. 13.

Рассмотрим ещё один пример. Пусть дано уравнение

$$y=3. \qquad (15)$$

Придадим переменной x два произвольных значения, например: $x=-1$ и $x=2$. И в том и в другом случае $y=3$. Следовательно, точки $P(-1;\ 3)$ и $Q(2;\ 3)$ принадлежат прямой (15). Эта прямая параллельна оси Ox, что можно было предвидеть, так как уравнение (15) есть частный случай уравнения $y=b$ (см. пример 2 в § 4).

§ 6. МЕТОД КООРДИНАТ КАК СРЕДСТВО РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Для иллюстрации применения метода координат мы рассмотрим решения трёх задач. В каждой из них требуется построить окружность, что с точки зрения аналитической геометрии равносильно составлению уравнения искомой окружности или нахождению её радиуса и координат центра.

К каждой задаче мы даём два решения: 1-е — методом координат, 2-е — средствами элементарной геометрии. Характерно, что решения первого рода проводятся по общему плану и сходны по идее, решения же второго рода имеют мало общих черт и основаны на применении различных теорем. Это обстоятельство имеет важное значение, показывая, хотя и на частных примерах, что применение метода координат значительно облегчает поиски путей, ведущих к решению задачи.

Задача 1. Построить окружность, проходящую через точки: $A(1;\ 1)$, $B(4;\ 0)$, $C(5;\ 1)$.

1-е решение. Уравнение искомой окружности имеет вид

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \qquad (16)$$

[см. формулу (8)].

Так как точки A, B, C лежат на искомой окружности, то их координаты удовлетворяют уравнению (16). Подставляя в это уравнение последовательно координаты данных точек, получим равенства

$$(1-a)^2+(1-b)^2=r^2,$$
$$(4-a)^2+b^2=r^2,$$
$$(5-a)^2+(1-b)^2=r^2,$$

из которых находим: $a=3$, $b=2$, $r=\sqrt{5}$. Следовательно, искомая окружность определяется уравнением

$$(x-3)^2+(y-2)^2=5.$$

2-е решение. Строим медиатрисы отрезков[1]) AB и BC. Они пересекутся в центре искомой окружности.

Задача 2. Через точки $A(4;\ 1)$ и $B(11;\ 8)$ провести окружность, касающуюся оси Ox.

1-е решение. Очевидно, искомая окружность лежит над осью Ox; так как вместе с тем она касается оси Ox, то ордината её центра равна её радиусу: $b=r$. Поэтому уравнение искомой окружности имеет вид

$$(x-a)^2+(y-r)^2=r^2$$

или

$$(x-a)^2+y^2-2ry=0.$$

Подставляя в это уравнение последовательно координаты точек A и B, получим равенства

$$(4-a)^2+1-2r=0,$$
$$(11-a)^2+64-16r=0.$$

Отсюда $a_1=7$, $a_2=-1$, $b_1=r_1=5$, $b_2=r_2=13$.

Следовательно, существуют две окружности, удовлетворяющие условию задачи (рис. 14)

$$(x-7)^2+(y-5)^2=25$$

и

$$(x+1)^2+(y-13)^2=169.$$

---

[1]) *Медиатрисой* отрезка называется прямая, проходящая через его середину и перпендикулярная к нему.

2-е решение. Проводим прямую AB. Точку пересечения её с осью Ox обозначим через C. К отрезкам CA и CB строим средний пропорциональный отрезок и откладываем на оси Ox по разные стороны точки C равные ему отрезки CD и CE (рис. 14).

Окружность, проходящая через точки A, B, D, удовлетворяет условию задачи. Действительно, отрезок CD есть касательная к этой окружности как среднее пропорциональное между секущей CB и её внешней частью CA. Подобным же образом убеждаемся, что условию задачи удовлетворяет и окружность, проходящая через точки A, B, E.

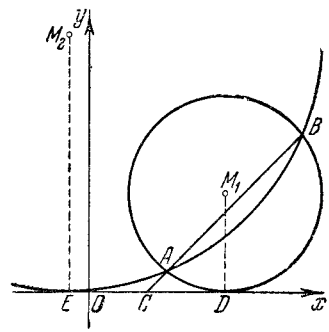

Рис. 14.

Задача 3. Через точку A (2; 1) провести окружность, касающуюся координатных осей.

1-е решение. Очевидно, искомая окружность лежит в I четверти; так как вместе с тем она касается осей Ox и Oy, то координаты её центра равны её радиусу: $a = b = r$. Поэтому уравнение искомой окружности имеет вид

$$(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2.$$

Подставляя в это уравнение координаты точки A, получим

$$(2 - r)^2 + (1 - r)^2 = r^2$$

или после упрощений

$$r^2 - 6r + 5 = 0.$$

Отсюда $r_1 = 1$, $r_2 = 5$. Получаем две окружности, удовлетворяющие условию задачи (рис. 15):

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

и

$$(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25.$$

2-е решение. Решим задачу методом подобия. Проводим прямую OA и строим в I четверти произвольную окружность, касающуюся осей Ox и Oy (на рис. 15 она изображена пунктиром); её центр S лежит на биссектрисе координатного угла.

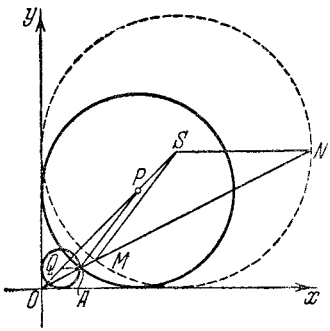

Рис. 15.

Пусть прямая OA пересекает построенную окружность в точках M и N. Строим прямые SM и SN и через точку A проводим параллельные им прямые, пересекающие биссектрису OS соответственно в точках P и Q: $AP \parallel SM$, $AQ \parallel SN$. Точки P и Q будут центрами искомых окружностей. Справедливость построения вытекает из теорем о подобии фигур.

§ 7. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ МЕТОДА КООРДИНАТ

1. Отыскание общих точек двух фигур. Покажем, как находятся общие точки фигур F и Ф, заданных уравнениями

$$f(x, y) = 0, \tag{17}$$

$$\varphi(x, y) = 0. \tag{18}$$

Предположим, что $P(x_1; y_1)$ — одна из искомых точек. Так как она принадлежит обеим данным фигурам, то её координаты удовлетворяют и уравнению (17) и уравнению (18). Если, обратно, мы найдём такие значения x_1, y_1 переменных x, y, которые удовлетворяют как уравнению (17), так и уравнению (18), то точка с координатами x_1, y_1 будет общей точкой фигур F и Ф. Эти значения находятся, очевидно, посредством решения системы уравнений (17), (18).

Таким образом, геометрическая задача отыскания общих точек двух фигур приводится к алгебраической задаче решения системы двух уравнений с двумя неизвестными.

Итак, *для отыскания общих точек двух фигур нужно решить совместно их уравнения; каждое решение даёт координаты общей точки этих фигур.*

Например, решая совместно уравнения

$$x^2 + y^2 = 25 \tag{19}$$

и

$$x - 2y + 5 = 0, \tag{20}$$

мы найдём координаты точек пересечения окружности (19) и прямой (20).

Из уравнения (20) находим: $x = 2y - 5$; отсюда и из уравнения (19) получаем

$$(2y - 5)^2 + y^2 = 25.$$

После упрощений будем иметь

$$y^2 - 4y = 0.$$

Отсюда $y_1 = 0$, $y_2 = 4$; далее находим: $x_1 = -5$, $x_2 = 3$. Таким образом, данные окружность и прямая пересекаются в точках $P(-5; 0)$ и $Q(3; 4)$ (см. рис. 12). Нетрудно проверить, что координаты точек P и Q удовлетворяют и уравнению (19) и уравнению (20).

2. Приложение метода координат к графическому решению уравнений. Если выше, решая совместно уравнения двух фигур, мы находили координаты их общих точек, то, обратно, имея два уравнения с неизвестными x и y, мы можем найти их корни как координаты общих точек фигур, определяемых данными уравнениями. На этих соображениях основываются различные практически очень удобные способы графического решения уравнений.

Графическое решение уравнений даёт обычно приближённые значения корней с невысокой степенью точности, достаточной, однако, в большинстве случаев для практических целей.

Рассмотрим два примера.

Пример 1. Для решения системы уравнений первой степени:

$$Ax + By + C = 0,$$

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

строим определяемые этими уравнениями прямые и находим путём измерения координаты их общей точки, учитывая, конечно, знаки координат.

Пример 2. Для графического решения кубического уравнения

$$x^3 + px + q = 0 \tag{21}$$

аккуратно вычерчиваем на миллиметровой бумаге кривую

$$y = x^3, \tag{22}$$

называемую *кубической параболой*, и проводим прямую

$$y = -px - q, \tag{23}$$

построив предварительно две её точки.

Абсциссы общих точек этих линий будут корнями уравнения (21). Действительно, обозначая через ξ, η координаты общей точки линий (22) и (23), замечаем, что равенства $\eta = \xi^3$ и $\eta = -p\xi - q$ будут тождествами, поэтому и вытекающее из них равенство $\xi^3 = -p\xi - q$ или $\xi^3 + p\xi + q = 0$ также будет тождеством; следовательно, ξ есть корень уравнения (21).

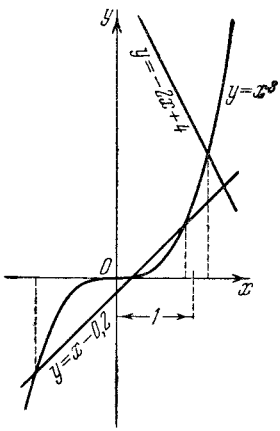

Рис. 16.

Рассмотренный способ позволяет находить только действительные корни кубических уравнений вида (21).

Наиболее трудоёмкой частью решения является изготовление чертежа с построенной на нём кубической параболой $y = x^3$, но зато такой чертёж может быть использован неоднократно, так как на нём можно нанести много прямых, определяемых уравнениями вида (23), и, следовательно, с его помощью можно решить много уравнений вида (21). Более того, имея уравнение (23) прямой, нет необходимости строить её: достаточно найти координаты двух её точек, отметить эти точки на чертеже, приложить к ним ребро линейки и найти абсциссы точек, в которых ребро линейки пересекает линию (22).

На рис. 16 решены графически уравнения

$$x^3 - x + 0{,}2 = 0 \tag{24}$$

и

$$x^3 + 2x - 4 = 0; \tag{25}$$

на нём, в соответствии с изложенной выше теорией, построены кубическая парабола $y = x^3$ и прямые: $y = x - 0{,}2$ и $y = -2x + 4$. Из чертежа находим приближённые значения корней уравнения (24): $-1{,}07$, $+0{,}2$, $+0{,}9$ и приближён-

ное значение $+1{,}2$ действительного корня уравнения (25). Уравнение (25) имеет только один действительный корень, так как кубическая парабола (22) и прямая $y=-2x+4$ имеют только одну общую точку.

3. Некоторые случаи исследования фигуры, заданной уравнением. Изучение фигуры, заданной уравнением, представляет, вообще говоря, сложную задачу, требующую применения методов высшей математики. Однако в некоторых случаях эта задача допускает простое решение. Если, например, фигура определяется уравнением первой степени, то она, как мы уже знаем, представляет собой прямую линию.

В приводимом ниже примере мы даём вывод уравнения параболы и исследуем некоторые её свойства.

Параболой называется линия, точки которой равноудалены от данной точки (*фокуса*) и данной прямой (*директрисы*).

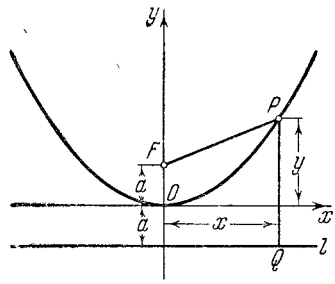

Рис. 17.

Пусть фокус F параболы имеет координаты $x=0$, $y=a$ $(a>0)$, и пусть её директриса l определяется уравнением $y=-a$ (рис. 17). Если $P(x;\ y)$ есть произвольная точка этой параболы, а Q — основание перпендикуляра, опущенного из P на l, то

$$FP=QP. \tag{26}$$

Очевидно, $QP=y+a$. Воспользовавшись формулой (2), находим $FP=\sqrt{x^2+(y-a)^2}$. Таким образом, равенство (26) может быть написано в виде

$$\sqrt{x^2+(y-a)^2}=y+a.$$

Отсюда получаем

$$x^2+y^2-2ay+a^2=y^2+2ay+a^2$$

и после упрощений

$$x^2=4ay. \tag{27}$$

Рассмотрим некоторые свойства параболы (27).

Из уравнения (27) мы видим, что $y=0$, если $x=0$, и $y>0$, если $x\neq 0$. Отсюда мы заключаем, что парабола (27)

проходит через начало координат, и что все остальные её точки лежат над осью Ox.

Парабола (27) симметрична относительно оси Oy. Действительно, если точка $A(x_1; y_1)$ лежит на данной параболе, то равенство $x_1^2 = 4ay_1$ будет тождеством, поэтому будет тождеством и равенство $(-x_1)^2 = 4ay_1$. Следовательно, точка $B(-x_1; y_1)$, симметричная с A относительно оси Oy, также лежит на данной параболе. Ось симметрии параболы называется обычно *осью параболы*.

Рассмотрим уравнение

$$y = kx + m. \tag{28}$$

Это уравнение — первой степени, следовательно, оно определяет прямую. Найдём абсциссы точек пересечения линий (27) и (28), для чего исключим y из равенств (27) и (28) и определим из полученного уравнения x.

Подставив в (27) вместо y выражение $kx + m$, получим

$$x^2 = 4a(kx + m)$$

или

$$x^2 - 4akx - 4am = 0. \tag{29}$$

Отсюда

$$x = 2ka \pm 2\sqrt{k^2a^2 + am}. \tag{30}$$

Корни уравнения (29) могут быть либо действительными и различными, либо мнимыми, либо действительными и равными. В первом случае имеем две точки пересечения, во втором — ни одной. Наибольший интерес представляет третий случай, когда обе точки пересечения сливаются, и прямая (28) будет касаться параболы (27). В этом случае $k^2a^2 + am = 0$, следовательно, $m = -k^2a$, и уравнение касательной принимает вид

$$y = kx - k^2a. \tag{31}$$

Координаты точки касания M находим из (30) и (27) или (31): $x = 2ka$, $y = k^2a$.

Укажем простое построение касательной к параболе. Обозначим через N основание перпендикуляра, опущенного из точки касания M на ось Oy (рис. 18). Строим точку N_1, симметричную с N относительно начала координат O, и проводим прямую MN_1. Точка N_1 лежит на линии (31), так как её координаты $x = 0$, $y = -k^2a$ удовлетворяют уравнению (31),

Таким образом, прямые (31) и MN_1 имеют две общие точки: M и N_1. Следовательно, прямая MN_1 есть искомая касательная.

Этот способ не пригоден для построения касательной в точке O. Покажем, что касательной к параболе в точке O будет ось Ox. Решая совместно уравнения $x^2 = 4ay$ и $y = 0$, находим: $x_1 = x_2 = 0$; следовательно, обе точки пересечения параболы (27) и оси Ox совпадают с точкой O.

Рассмотрим ещё построение нормали к параболе, то есть перпендикуляра к касательной, проходящего через точку касания. Пусть N_2 есть точка пересечения нормали MN_2 с осью Oy

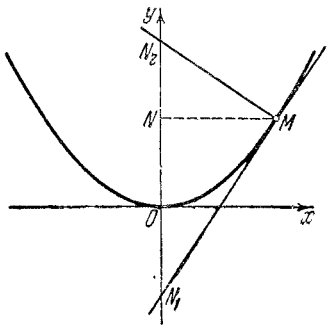

Рис. 18.

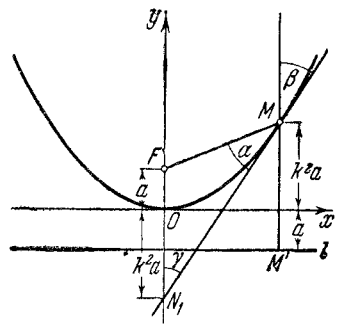

Рис. 19.

(рис. 18). Из прямоугольного треугольника MN_1N_2 имеем: $NN_1 \cdot NN_2 = MN^2$. Так как $MN = 2ka$, $NN_1 = 2k^2a$, то $NN_2 = 2a$. Построив в соответствии с последним равенством точку N_2, проводим прямую MN_2; она будет искомой нормалью.

Построим ещё прямую MM', параллельную оси Oy (рис. 19). Так как расстояние от M до l равно $k^2a + a$, то и $MF = k^2a + a$. С другой стороны, $N_1F = N_1O + OF = k^2a + a$. Поэтому $MF = N_1F$, и треугольник FMN_1 — равнобедренный. Следовательно (см. обозначения на рис. 19), $\angle\alpha = \angle\gamma$. Вследствие параллельности оси Oy и прямой MM' $\angle\gamma = \angle\beta$. Поэтому

$$\angle\alpha = \angle\beta. \qquad (32)$$

Вогнутое зеркало, поверхность которого может быть описана вращением параболы вокруг её оси[1]), обладает, как

[1]) Такая поверхность называется *параболоидом вращения*.

видно из равенства (32), следующими свойствами: лучи, параллельные оси, оно собирает в фокусе; если же в фокусе помещён источник света, то выходящий из него луч, отразившись от зеркала, пойдёт параллельно оси зеркала. Отсюда вытекает, что отражающей поверхности зеркал телескопов и прожекторов следует придавать форму параболоида вращения.

§ 8. ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ

В аналитической геометрии применяются не только прямоугольные декартовы координаты, но и многие другие системы координат. Из них наиболее употребительна система полярных координат, отличающаяся большой простотой. Она будет рассмотрена в настоящем параграфе.

При выборе системы координат следует считаться с характером изучаемых фигур и решаемых задач, так как успех решения зависит в значительной степени от соответствия средств решения данным задачи. В частности, для ряда задач наиболее простые решения получаются в результате использования системы полярных координат.

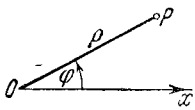

Рис. 20.

Перейдём к определению полярных координат точки.

Пусть в плоскости даны точка O (*полюс*) и выходящая из O полупрямая Ox (*полярная ось*). Возьмём в данной плоскости произвольную точку P, построим отрезок OP и рассмотрим длину ρ этого отрезка и угол $xOP = \varphi$ (рис. 20). Величины ρ и φ называются *полярными координатами* точки P; ρ называется *полярным радиусом* этой точки, φ — её *полярным углом*. Полярным углом точки P можно считать не только угол φ, но и угол $\varphi + 2k\pi$, где k — произвольное целое число [1]).

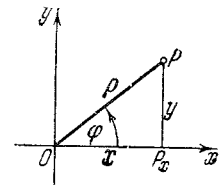

Рис. 21.

Примем полярную ось за положительную часть оси Ox прямоугольной декартовой системы координат в рассматриваемой плоскости и точку O за начало координат и построим $PP_x \perp Ox$ (рис. 21). Если точка P лежит в I четверти, то из прямоугольного треугольника OPP_x

[1]) Везде в этой книжке за единицу меры угла принят радиан.

получим

$$x = \rho \cos \varphi, \qquad y = \rho \sin \varphi, \tag{33}$$

где x и y — прямоугольные декартовы координаты точки P. Можно убедиться, что формулы (33) справедливы и в том случае, когда P есть любая точка плоскости Oxy.

Из прямоугольного треугольника OPP_x находим также

$$\rho = +\sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \tag{34}$$

Формулы (33) и (34) выражают зависимости между прямоугольными декартовыми и полярными координатами точки.

Условимся считать, что уравнение

$$f(\varphi, \rho) = 0$$

определяет некоторую фигуру как множество точек, полярные координаты которых удовлетворяют этому уравнению (ср. § 4).

Например, уравнение

$$\rho = a\varphi, \tag{35}$$

где a — постоянное положительное число, определяет бесконечную линию, называемую *спиралью Архимеда* (рис. 22).

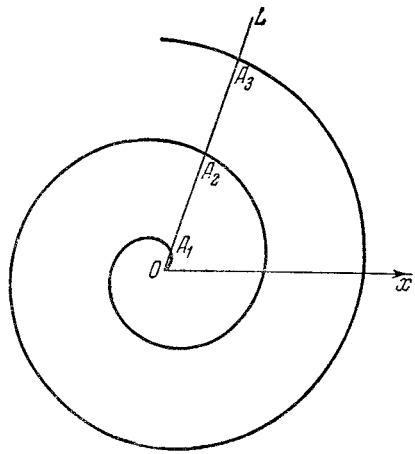

Рис. 22.

Проведём из точки O полупрямую OL и обозначим точки пересечения её со спиралью Архимеда, в порядке их следования на OL, через A_1, A_2, A_3, ... Если $\angle xOL = \theta < 2\pi$, то

$$OA_1 = a\theta,$$

$$OA_2 = a(\theta + 2\pi),$$

$$OA_3 = a(\theta + 4\pi), \ \ldots$$

Отсюда

$$A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = 2\pi a.$$

Таким образом, расстояние между соседними точками пересечения указанных линий есть постоянная величина, не зависящая от того, какое направление имеет полупрямая OL.

От уравнения фигуры в прямоугольных декартовых координатах можно перейти к уравнению той же фигуры в полярных координатах с помощью формул (33); обратный переход осуществляется с помощью формул (34).

Например, написав уравнение спирали Архимеда в виде

$$\operatorname{tg}\frac{\rho}{a}=\operatorname{tg}\varphi$$

и воспользовавшись формулами (34), получим следующее уравнение этой линии в прямоугольных декартовых координатах:

$$\operatorname{tg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}=\frac{y}{x}. \tag{36}$$

Сопоставление уравнений (35) и (36) показывает, что для изучения спирали Архимеда предпочтительнее пользоваться полярными координатами.

Рассмотрим ещё один пример. Пусть даны две окружности k и k' диаметра a; обозначим их центры соответственно через M и M'. Если окружность k неподвижна, а k' катится без скольжения по k, то закреплённая на k' точка P описывает линию, называемую *кардиоидой*.

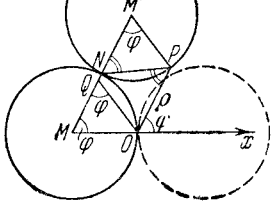

Рис. 23.

В одном из своих положений точка P совпадает с некоторой точкой O окружности k; соответствующее положение окружности k' будем считать начальным (на рис. 23 оно изображено пунктиром).

Выведем уравнение кардиоиды в полярных координатах. Точка O делит прямую MO на две полупрямые; ту из них, которая не содержит точки M, мы примем за полярную ось, а точку O — за полюс.

Рассмотрим положение окружности k', отличное от начального. Точку касания окружностей k и k' обозначим через N. Так как k' катится по k без скольжения, то $\overset{\smile}{NO}=\overset{\smile}{NP}$, следовательно, $OP \parallel MM'$ и $\angle PM'M=\angle OMM'=\angle xOP=\varphi$.

Проведём $OQ \parallel PM'$. Очевидно, $OQ = PM' = \frac{1}{2}a$; поэтому треугольник MOQ — равнобедренный, и $MQ = 2 \cdot \frac{1}{2} a \cos\varphi = a\cos\varphi$. Далее, $\rho = OP = MM' - MQ = a - a\cos\varphi$. Итак, уравнение кардиоиды имеет вид

$$\rho = a(1 - \cos\varphi). \tag{37}$$

Эта линия изображена на рис. 24.

Закрепим на кардиоиде точку $P(\rho; \varphi)$ и рассмотрим перемещающуюся по кардиоиде точку U (рис. 24). Пусть $OU = \rho'$, $\angle UOP = \zeta$, $\angle OPU = \mu$. Очевидно, $\rho' = a[1 - \cos(\varphi - \zeta)]$.

Если точка U, перемещаясь по кардиоиде, неограниченно приближается к точке P, то прямая PU, поворачиваясь вокруг точки P, стремится к некоторому предельному положению; это предельное положение прямой PU есть касательная к кардиоиде в точке P, а предельная величина угла μ определяет угол между этой касательной и полярным радиусом OP.

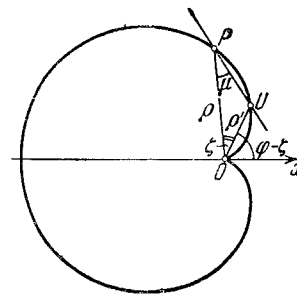

Рис. 24.

Применяя к треугольнику OPU теорему синусов, получим

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\sin\mu}{\sin(\mu + \zeta)}$$

или

$$\frac{1 - \cos(\varphi - \zeta)}{1 - \cos\varphi} = \frac{\sin\mu}{\sin(\mu + \zeta)}.$$

Вычитая из обеих частей последнего равенства по единице, будем иметь

$$\frac{\cos\varphi - \cos\varphi\cos\zeta - \sin\varphi\sin\zeta}{1 - \cos\varphi} = \frac{\sin\mu - \sin\mu\cos\zeta - \cos\mu\sin\zeta}{\sin(\mu + \zeta)}$$

или

$$\frac{\cos\varphi(1 - \cos\zeta) - \sin\varphi\sin\zeta}{1 - \cos\varphi} = \frac{\sin\mu(1 - \cos\zeta) - \cos\mu\sin\zeta}{\sin(\mu + \zeta)}.$$

Поделив числители на $\sin\zeta$ и принимая во внимание, что $\frac{1-\cos\zeta}{\sin\zeta}=\operatorname{tg}\frac{\zeta}{2}$, получим

$$\frac{\cos\varphi\operatorname{tg}\frac{\zeta}{2}-\sin\varphi}{1-\cos\varphi}=\frac{\sin\mu\operatorname{tg}\frac{\zeta}{2}-\cos\mu}{\sin(\mu+\zeta)}.$$

Если точка U неограниченно приближается к точке P, то ζ и $\operatorname{tg}\frac{\zeta}{2}$ в пределе равны нулю, и предыдущее равенство принимает вид

$$\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}=\operatorname{ctg}\mu.$$

Отсюда находим предельное значение величины μ: $\mu=\frac{1}{2}\varphi$. Таким образом, касательная к кардиоиде образует с полярным радиусом точки касания угол, равный половине полярного угла точки касания.

Покажем ещё, что нормалью к кардиоиде в точке P является прямая PN, проходящая через точку касания N окружностей k и k' (рис. 23). Действительно, $\angle OPN=\angle PNM'=\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}$, следовательно, касательная в точке P образует с прямой PN угол $\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}+\frac{\varphi}{2}=\frac{\pi}{2}$.

§ 9. ПРИМЕРЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФИГУР УРАВНЕНИЯМИ

Приводимые в этом параграфе примеры помогут читателю полнее уяснить себе способ определения геометрических фигур уравнениями и вместе с тем покажут, что относительно простыми уравнениями могут определяться весьма своеобразные фигуры.

Пример 1. Рассмотрим уравнение[1]):

$$\frac{|x|}{x}+\frac{|y|}{y}=2. \tag{38}$$

Очевидно,

$$\frac{|a|}{a}=1, \text{ если } a>0,$$

и

$$\frac{|a|}{a}=-1, \text{ если } a<0.$$

[1]) Через $|a|$ обозначается абсолютное значение величины a.

Поэтому выражение $\frac{|x|}{x}+\frac{|y|}{y}$, где x, y — координаты некоторой точки P, равно 2, если точка P лежит в I четверти, равно нулю, если точка P лежит во II или IV четвертях, и равно -2, если точка P лежит в III четверти; наконец, это выражение не имеет смысла, если точка P лежит на одной из координатных осей или совпадает с началом координат.

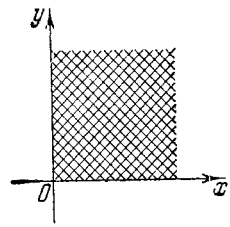

Рис. 25.

Следовательно, уравнение (38) определяет кусок плоскости, а именно, I четверть плоскости Oxy, причём ни одна из точек оси Ox или оси Oy в этом куске плоскости не содержится (рис. 25).

Пример 2. Уравнение

$$\left\{x-\frac{|x|}{x}\right\}^2+\left\{y-\frac{|y|}{y}\right\}^2=4 \qquad (39)$$

следует рассматривать отдельно для каждой из четвертей плоскости Oxy; тогда оно может быть записано в более простом виде:

$$(x-1)^2+(y-1)^2=4 \quad \text{— для I четверти,} \qquad (40)$$

$$(x+1)^2+(y-1)^2=4 \quad \text{— для II четверти,} \qquad (41)$$

$$(x+1)^2+(y+1)^2=4 \quad \text{— для III четверти,} \qquad (42)$$

$$(x-1)^2+(y+1)^2=4 \quad \text{— для IV четверти.} \qquad (43)$$

Уравнение (40) по форме не отличается от уравнения окружности радиуса 2 с центром $K(1;\ 1)$, но оно определяет только ту её дугу, которая лежит в I четверти, так как для других четвертей нами получены иные уравнения. Эта дуга и дуги окружностей (41), (42) и (43), лежащие соответственно во II, III и IV четвертях, составляют фигуру, определяемую уравнением (39) (рис. 26).

Ни одна из точек оси Ox и оси Oy не содержится в фигуре (39), так как выражение $\frac{|y|}{y}$ не имеет смысла, если $y=0$, а выражение $\frac{|x|}{x}$ не имеет смысла, если $x=0$.

Пример 3. Уравнение

$$|x|+|y|=2 \qquad (44)$$

также следует рассматривать отдельно для каждой из четвертей плоскости Oxy. Его можно записать в виде

$$\begin{aligned} x+y&=2 \quad &&\text{— для I четверти,}\\ -x+y&=2 \quad &&\text{— для II четверти,}\\ -x-y&=2 \quad &&\text{— для III четверти,}\\ x-y&=2 \quad &&\text{— для IV четверти,}\end{aligned}$$

так как $|a|=a$, если $a\geqslant 0$, и $|a|=-a$, если $a\leqslant 0$. Не-

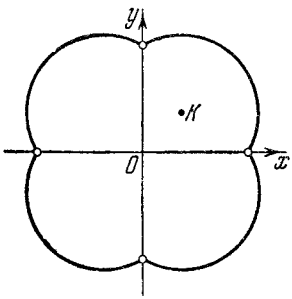

Рис. 26.

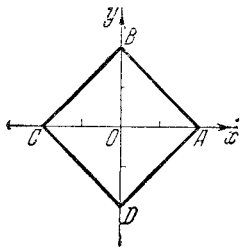

Рис. 27.

трудно убедиться, что уравнение (44) определяет обвод квадрата $ABCD$, включая его вершины (рис. 27).

Пример 4. Уравнение

$$y=|y|\cdot\sin x \tag{45}$$

обращается в тождество в следующих случаях:

1) если $y=0$; переменная x может в этом случае иметь произвольное значение;

2) если y — произвольное положительное число, а $\sin x=1$ и, следовательно, $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, где k — любое целое число;

3) если y — произвольное отрицательное число, а $\sin x=-1$ и, следовательно, $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, где k — любое целое число.

Поэтому фигура (45) состоит из оси Ox и бесконечного множества полупрямых двух родов; полупрямые первого рода выходят из точек оси Ox с абсциссами $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}\pm 2\pi$, $\frac{\pi}{2}\pm 4\pi$, ..., перпендикулярны к оси Ox и лежат над ней;

полупрямые второго рода выходят из точек оси Ox с абсциссами: $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \pm 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \pm 4\pi$, ..., перпендикулярны

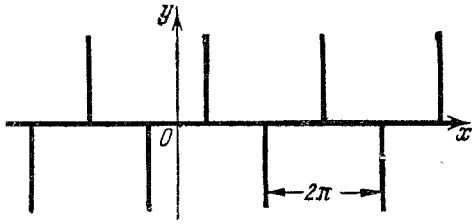

Рис. 28.

к оси Ox и лежат под ней (рис. 28).

Пример 5. Уравнение

$$\sin(\rho\pi) = 0,$$

равносильное бесконечному множеству уравнений:

$$\rho = 0, \quad \rho = \pm 1, \quad \rho = \pm 2, \quad \rho = \pm 3, \ldots,$$

определяет полюс и окружности радиусов 1, 2, 3, ... с общим центром в полюсе (рис. 29). Отрицательные значения вели-

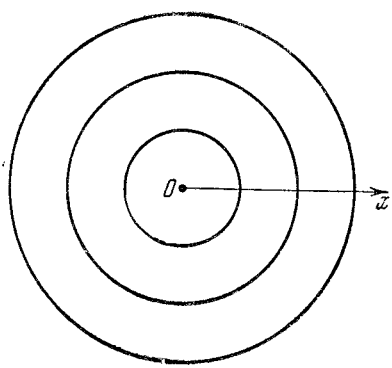

Рис. 29.

чины ρ не должны рассматриваться, так как по определению $\rho \geqslant 0$.

Пример 6. Через $E(a)$ обозначается наибольшее целое число, не превышающее a [1]). Например, $E(2)=2$, $E(5{,}99)=5$, $E(-5{,}99)=-6$, $E(\pi)=3$, $E(\sqrt{50})=7$, $E(-4)=-4$, $E(-4{,}7)=-5$.

Рассмотрим уравнение

$$y=E(x). \tag{46}$$

Если $n\leqslant x<n+1$, где n — целое число, то $y=n$. Поэтому уравнение (46) определяет фигуру, состоящую из бесконечного множества отрезков, расположенных наподобие ступеней лестницы (рис. 30).

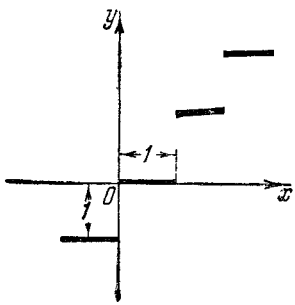

Рис. 30.

Один из этих отрезков лежит на оси Ox. Абсцисса крайней левой его точки равна нулю. Покажем, что он не имеет крайней правой точки.

Допустим, что такая точка P существует, и её абсцисса равна p. Так как $E(p)=0$ и, очевидно, $p\neq 0$, то $0<p<1$. Обозначим через q число $p+\frac{1-p}{2}=\frac{1+p}{2}$ и через Q — точку оси Ox с абсциссой q. Очевидно, $p<q<1$ и $E(q)=0$. Следовательно, точка Q принадлежит тому же отрезку фигуры (46) и расположена правее точки P, что противоречит сделанному нами допущению.

Точно так же убеждаемся, что любой из упомянутых выше отрезков фигуры (46) имеет крайнюю левую, но не имеет крайней правой точки.

Пример 7. Фигура, определяемая уравнением

$$E(x)=E(y),$$

состоит из бесконечного множества квадратов с их внутренними точками, но без верхних и правых сторон; сторона каждого из этих квадратов равна единице; расположение их показано на рис. 31.

---

[1]) Такой же смысл имеет обозначение $[a]$, встречающееся нередко в математической литературе.

Действительно, если x и y — произвольные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$n \leqslant x < n+1, \qquad n \leqslant y < n+1,$$

где n — целое число, то $E(x) = E(y) = n$.

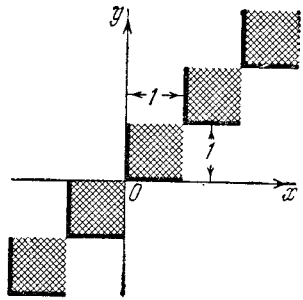

Рис. 31.

Пример 8. Выше мы видели, что уравнения (39) и (44) упрощались, если рассматривалась не вся плоскость Oxy, а только одна из её четвертей. Приём разбиения плоскости на части мы применим и при рассмотрении уравнения

$$\left\{x - E\left(x+\frac{1}{2}\right)\right\}^2 + \left\{y - E\left(y+\frac{1}{2}\right)\right\}^2 = \frac{1}{16}. \qquad (47)$$

Разобьём плоскость Oxy на квадраты прямыми:

$$x = \pm\frac{1}{2}, \qquad x = \pm\frac{3}{2}, \qquad x = \pm\frac{5}{2}, \ldots \qquad (48)$$

$$y = \pm\frac{1}{2}, \qquad y = \pm\frac{3}{2}, \qquad y = \pm\frac{5}{2}, \ldots \qquad (49)$$

Рассмотрим один из этих квадратов, например квадрат Q, ограниченный прямыми:

$$x = \frac{3}{2}, \qquad x = \frac{5}{2}, \qquad y = \frac{1}{2}, \qquad y = \frac{3}{2}.$$

Координаты любой внутренней точки квадрата Q удовлетворяют неравенствам

$$\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}, \qquad \frac{1}{2} < y < \frac{3}{2}$$

или

$$2 < x + \frac{1}{2} < 3, \qquad 1 < y + \frac{1}{2} < 2.$$

Поэтому внутри квадрата Q, то есть при условии, что рассматриваются значения переменных x и y, являющиеся координатами внутренних точек квадрата Q, уравнение (47) принимает вид

$$(x-2)^2+(y-1)^2=\frac{1}{16}. \qquad (50)$$

Уравнение (50) определяет окружность радиуса $\frac{1}{4}$, центр которой $M(2;\ 1)$ является вместе с тем центром квадрата Q. Окружность (50) лежит целиком внутри Q, поэтому координаты любой её точки удовлетворяют уравнению (47).

Рассуждая подобным же образом, приходим к выводу, что фигура (47) состоит из бесконечного множества окружностей;

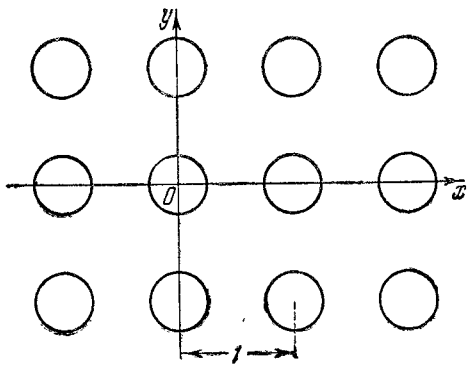

Рис. 32.

радиус каждой из них равен $\frac{1}{4}$, и каждая точка с целочисленными координатами является центром одной из этих окружностей (рис. 32).

Пример 9. Уравнение

$$\left\{x-E\left(x+\frac{1}{2}\right)\right\}^2+\left\{y-E\left(y+\frac{1}{2}\right)\right\}^2=\frac{5}{16} \qquad (51)$$

отличается от уравнения (47) только правой частью. Поэтому внутри квадрата Q, о котором шла речь в предыдущем примере, уравнение (51) принимает вид

$$(x-2)^2+(y-1)^2=\frac{5}{16},$$

следовательно, оно определяет в Q окружность радиуса $\frac{\sqrt{5}}{4}$ с центром $M(2;\ 1)$. Так как $\frac{\sqrt{5}}{4} > \frac{1}{2}$, то внутри квадрата Q лежит лишь часть этой окружности, являющаяся вместе с тем частью фигуры (51), тогда как точки её, лежащие вне Q, в состав фигуры (51) не входят. Предлагаем читателю убедиться, что точки пересечения этой окружности со сторонами квадрата Q также принадлежат фигуре (51).

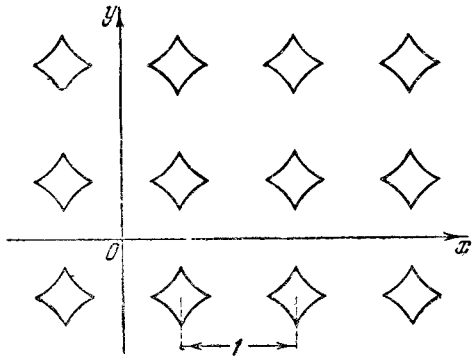

Рис. 33.

Подобным же образом исследуются и другие квадраты, на которые плоскость Oxy разбита прямыми (48) и (49).

Фигура (51) изображена на рис. 33.

Читателю, внимательно рассмотревшему приведённые выше примеры, нетрудно будет построить фигуры, определяемые следующими уравнениями:

1) $y = |x|$;

2) $\sin^2(\pi x) + \sin^2(\pi y) = 0$;

3) $\sin(x + y) = 0$;

4) $(x + |x|)^2 + (y + |y|)^2 = 4$;

5) $\left\{x - 2\frac{|x|}{x}\right\}^2 + \left\{y - 2\frac{|y|}{y}\right\}^2 = 5$;

6) $\left\{x - \frac{|x|}{x}\right\}^2 + \left\{y + \frac{|y|}{y}\right\}^2 = 4$;

7) $\left\{x - \frac{|x|}{x} - \frac{|y|}{y}\right\}^2 + \left\{y - \frac{|x|}{x} - \frac{|y|}{y}\right\}^2 = 4$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мысль о возможности систематического применения метода координат в научных исследованиях зародилась несколько тысяч лет тому назад. Известно, например, что астрономы древнего мира, используя специальные системы координат на воображаемой небесной сфере, определяли положение наиболее ярких звёзд, составляли карты звёздного неба, вели отличавшиеся большой точностью наблюдения за перемещением Солнца, Луны и планет относительно неподвижных звёзд.

В более позднюю эпоху широко развилось использование системы географических координат для составления карт земной поверхности и определения местонахождения корабля в открытом море.

Однако до XVII века применение метода координат имело односторонний характер: им пользовались, по сути, только для указания положения определённого объекта — неподвижного (гора, мыс) или движущегося (корабль, планета).

Новое, исключительно плодотворное применение получил метод координат в книге французского философа и математика Рене Декарта «Геометрия», изданной в 1637 году.

Декарт выяснил важное значение понятия переменной величины. Занимаясь изучением наиболее употребительных линий, Декарт заметил, что координаты точки, перемещающейся по данной линии, связаны определённым уравнением, вполне характеризующим эту линию. Так был найден способ изучения линий по их уравнениям, положивший начало аналитической геометрии и способствовавший развитию других математических наук.

«Поворотным пунктом в математике, — писал Энгельс, — была декартова *переменная величина.* Благодаря этому в математику вошли *движение* и *диалектика* и благодаря этому

же стало *немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление*» [1]).

Математической основой аналитической геометрии является своеобразный способ определения геометрических фигур: фигура задаётся уравнением. Возможны два подхода к выяснению сущности этого способа.

Рассматривая точку с переменными координатами x, y, связанными некоторым уравнением, мы замечаем, что она перемещается в плоскости с изменением её координат, но пробегаемый ею путь не будет произвольным, так как данное уравнение устанавливает зависимость между величинами x и y. Иными словами, уравнение играет роль как бы рельсов, направляющих движение точки по определённому пути. Например, точка $P(1;\ 1)$ линии

$$y = x^3 \tag{52}$$

может переместиться в положение $P'\left(\frac{3}{2};\ 3\frac{3}{8}\right)$ или $P''(2;\ 8)$, но уравнение (52) не позволит ей перейти в положение $Q(2;\ 7)$.

Возможно, однако, не связывать задание фигуры уравнением с представлением о движущейся точке, описывающей эту фигуру подобно трассирующей пуле, оставляющей светящийся след, или подобно перу сейсмографа, вычерчивающему линию, отображающую колебания земной коры. Можно рассматривать уравнение как средство для отбора точек, составляющих определяемую уравнением фигуру: отбираются те точки плоскости, координаты которых удовлетворяют данному уравнению.

Первая концепция, восходящая к Декарту, тесно связана с понятием функциональной зависимости: линия, определяемая уравнением, рассматривается как график функции, а изменению аргумента и функции ставится в соответствие перемещение точки, описывающей график функции.

Проще по идее и доступнее для понимания вторая концепция, охватывающая, к тому же, более широкий класс фигур [2]); выяснению характерных особенностей её посвящены

---

[1]) Ф. Энгельс, Диалектика природы, 1950, стр. 206.

[2]) Действительно, лишь при значительном и едва ли оправдывающем себя расширении понятия функциональной зависимости можно считать, что фигуры, рассмотренные в примерах 1, 4, 7 § 9, являются графиками некоторых функций.

у нас § 4 и отчасти §§ 5—9. Ближе к этой концепции и способ определения фигур неравенствами, о котором мы можем лишь мимоходом упомянуть здесь, ограничившись приведением следующего примера: точки, координаты которых удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 \leqslant 25$, принадлежат кругу радиуса 5 с центром в начале координат, включая точки его граничной окружности.